

بر صفحه مذکور رسم می‌کنیم. Δ جواب مسئله است (شکل ۲). زیرا:

$$\Delta \perp L \text{ و } \Delta \perp L' \Leftrightarrow \Delta \perp P \text{ و چون } L$$

با L'' موازی است، در نتیجه: $\Delta \perp L$.

■ اثبات یکتایی: فرض کنیم Δ' نیز از نقطه A گذشته و بر دو خط متنافر L و L' عمود باشد. چون L'' با L موازی است، پس Δ' بر L'' نیز عمود است. Δ' بر دو خط متقاطع از صفحه P عمود است و در نتیجه بنابر «قضیه اساسی تعامد» بر صفحه مزبور عمود خواهد بود. اما از یک نقطه خارج از یک صفحه مانند P ، یک و تنها یک خط می‌تواند بر صفحه عمود رسم کرد. پس Δ' و Δ یکی هستند.

راه‌های گوناگون

حل یک مسئله

و اهمیت یکتایی جواب

اشاره

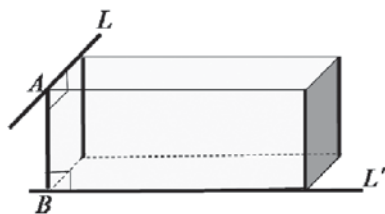
مسئله‌ای که به آن خواهیم پرداخت، مسئله‌ای از کتاب هندسه ۲ است که با راه‌حل‌های گوناگون برای آن به یک جواب منحصر به فرد و یکتا خواهیم رسید. در این مسئله برای اثبات یکتایی جواب از روش برهان خلف استفاده خواهد شد.



سیمین افروزان
دبیر ریاضی منطقه ۲

فریده طاهری
دبیر ریاضی منطقه ۸ تهران

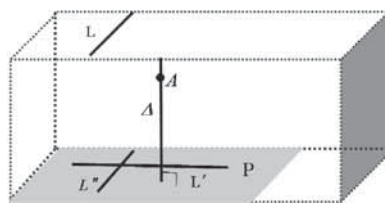
نکته: توجه کنید که دو خط عمود بر هم در فضا الزاماً یکدیگر را قطع نمی‌کنند. بنابراین خط Δ که از نقطه A می‌گذرد و بر دو خط متنافر L و L' عمود است، امکان دارد L یا L' یا هر دو را قطع نکند. در حالت خاصی که Δ هر دو را قطع کند، عمود مشترک دو خط متنافر نامیده می‌شود. در مکعب مستطیل شکل ۳، با وجودی که تمام یال‌های جانبی مکعب مستطیل بر دو خط متنافر L و L' عمود هستند، ولی در میان این یال‌های موازی تنها یال AB است که عمود مشترک دو خط مذکور محسوب می‌شود.



شکل ۳.

■ اثبات یکتایی جواب: از نقطه دلخواهی روی L' خط L'' را موازی L رسم می‌کنیم. چون L با صفحه P موازی است، L'' به تمامی در صفحه P قرار دارد. اگر Δ' گذرا از A را جواب دیگر مسئله در نظر بگیریم، Δ' متمایز از Δ عمود دیگری بر P است (تناقض).

■ راه‌حل دوم: از نقطه دلخواهی روی L' خط L'' را موازی L رسم می‌کنیم. صفحه P شامل دو خط متقاطع L و L'' را در نظر می‌گیریم. از نقطه A ، خط Δ را عمود

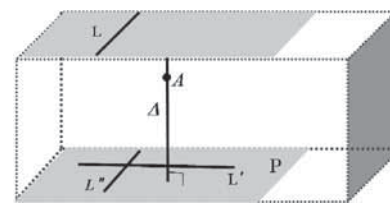


شکل ۲.

مسئله ۷ صفحه ۱۵۳

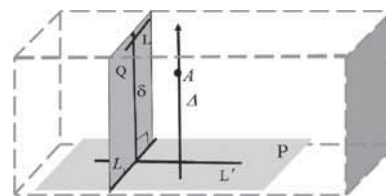
ثابت کنید اگر L و L' دو خط متنافر باشند، از هر نقطه مانند A یک و تنها یک خط می‌گذرد که بر L و L' عمود باشد.

■ راه‌حل اول: دو خط متنافر را در دو صفحه موازی قرار می‌دهیم. از نقطه A خط Δ را بر یکی از دو صفحه عمود می‌کنیم. از آنجا که این خط به علت موازی بودن دو صفحه بر صفحه دیگر نیز عمود است، بر دو خط متنافر مفروض عمود می‌شود و جواب مسئله است (شکل ۱).



شکل ۱.

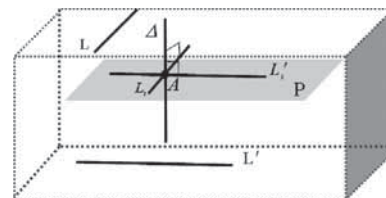
■ راه حل سوم: δ عمود مشترک دو خط متناظر مفروض را، مطابق روش کتاب که در درس صفحه بعد کتاب هندسه ۲ توضیح داده شده است، رسم می‌کنیم. از نقطه A در فضا خط Δ را موازی δ می‌کشیم. Δ جواب مسئله است. زیرا Δ با خطی موازی است که بر هر دو خط متناظر مذکور عمود است (شکل ۴).



شکل ۴.

■ اثبات یکتایی جواب: اگر Δ' نیز از نقطه A گذشته و بر دو خط متناظر L و L' عمود باشد، Δ' بر L_1 نیز که با L موازی است، عمود خواهد بود. در نتیجه بر صفحه دو خط متقاطع L' و L_1 ، یعنی بر صفحه P عمود است. از آنجا که دو خط عمود بر یک صفحه موازی‌اند، پس Δ' با δ موازی خواهد شد. اما از نقطه A خارج از خط δ ، بنابر اصل توازی، یک و تنها یک خط می‌توان به موازات آن رسم کرد. پس Δ' همان Δ است.

■ راه حل چهارم: از نقطه A دو خط به موازات دو خط متناظر مفروض رسم می‌کنیم (L_1, L_1'). صفحه P شامل دو خط متقاطع را در نظر می‌گیریم. خط Δ که از نقطه A عمود بر صفحه P رسم می‌شود، جواب مسئله است. زیرا: $L_1 \perp P \Rightarrow \Delta \perp L_1, L_1'$ در نتیجه Δ بر L و L' که به ترتیب با L_1 و L_1' موازی‌اند نیز عمود است (شکل ۵).



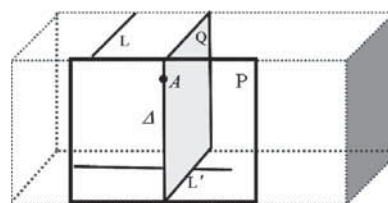
شکل ۵.

■ اثبات یکتایی جواب: اگر Δ' که از نقطه A می‌گذرد نیز بر L و L' عمود باشد، آن‌گاه Δ' بر L_1 و L_1' هم که به ترتیب با L و L' موازی هستند، عمود است. پس Δ' بر صفحه گذرنده از آن‌ها، یعنی P عمود است. در این صورت از نقطه A دو خط عمود بر یک صفحه خواهیم داشت (تناقض).

■ راه حل پنجم: از نقطه A صفحه P را عمود بر خط L و همچنین از نقطه A صفحه Q را عمود بر خط L' رسم می‌کنیم. Δ ، فصل مشترک دو صفحه P و Q ، جواب مسئله است (شکل ۶). زیرا:

$$\left. \begin{aligned} L \perp P &\rightarrow L \perp \Delta \\ L' \perp P &\rightarrow L' \perp \Delta \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta \text{ بر دو خط عمود است.}$$

صفحه‌های P و Q که هر دو شامل نقطه A هستند، برهم منطبق نیستند. زیرا در صورت منطبق بودن، L و L' که بر آن دو صفحه عمودند، در واقع بر یک صفحه عمود می‌شدند و موازی بودند که این خلاف متناظر بودنشان است.



شکل ۶.

خط Δ منحصر به فرد یعنی یکتاست، زیرا:

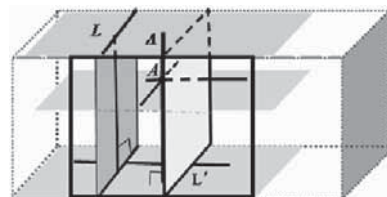
■ روش اول برای اثبات یکتایی جواب: فرض می‌کنیم دو خط Δ و Δ' جواب مسئله باشند. یعنی Δ' نیز از نقطه A گذشته و بر دو خط متناظر مفروض عمود است. در این صورت چون: $L \perp P$ و $L' \perp P$ ، با توجه به مسئله ۵ همان صفحه کتاب هندسه ۲، Δ' موازی P خواهد بود. به طریق مشابه Δ' موازی Q نیز هست. از آنجا که اگر خطی با دو صفحه متقاطع

موازی باشد، با فصل مشترک آن‌ها موازی است، در نتیجه Δ' و Δ موازی خواهند بود. نتیجه می‌گیریم که دو خط شامل A هستند، پس برهم منطبق‌اند و این نشان از یکتایی Δ دارد.

■ روش دوم برای اثبات یکتایی: فرض می‌کنیم دو خط Δ و Δ' جواب مسئله باشند. یعنی Δ' نیز از نقطه A گذشته و بر دو خط متناظر مفروض عمود است. پس Δ' که از نقطه A می‌گذرد و بر L عمود است، بنابر مسئله ۶ همان صفحه، در داخل صفحه‌ای قرار می‌گیرد که شامل A است و بر L عمود است. یعنی Δ' داخل P خواهد بود. به دلیل مشابه چون Δ' بر L' نیز عمود است، داخل صفحه Q واقع خواهد شد. در نتیجه Δ' فصل مشترک دو صفحه و بر Δ منطبق است.

یکتایی جواب و معادله خط مطلوب

یکتایی جواب مسئله که به روش برهان خلف در هر راه حل ارائه شده است، نشان می‌دهد از همه راه‌حل‌ها تنها به یک جواب خواهیم رسید و همه راه‌ها به یک جواب Δ ختم می‌شوند (شکل ۷). تنها یک خط است که از نقطه مفروض A می‌گذرد و بر دو خط متناظر داده شده عمود است. معادله این خط منحصر به فرد را می‌توان پس از فراگیری معادله خط در فضا در هندسه تحلیلی سال چهارم (پیش‌دانشگاهی) به آسانی نوشت. پیش‌نیاز هندسه تحلیلی سال آینده، فصل هندسه فضایی در کتاب هندسه ۲ است. این فصل را با تعمق بیشتری بخوانید تا درک مطالب برایتان آسان‌تر شود.



شکل ۷.